Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek II. című tárgyhoz

Burai Pál

Laplace transzformáció

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Laplace transzformáció

A Laplace transzformáció, többek között, lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenletek megoldására szolgáló eszköz. Az eljárás lépései a következők:

1. A "nehéz" problémát (KDE) "könnyű" problémává (algebrai egyenlet) transzformáljuk.
2. Az egyenletet algebrai eszközökkel megoldjuk.
3. Az így kapott megoldást visszatranszformáljuk.

Az eljárás segítségével

Laplace transzformáció $\longrightarrow$ Algebrai egyenlet megoldása $\longrightarrow$ Inverz Laplace transzformáció

differenciálegyenletek bizonyos típusainak megoldása algebrai egyenletek megoldásává egyszerűsödik.

Laplace transzformáció

Definíció

Tegyük fel, hogy $f(t)$ a nemnegatív valós számok halmazán $t \geq 0$ definiált függvény ($f(t)$ lehet valós és komplex is). Ekkor a következő egyenlőséggel definiált függvényt

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

f **Laplace transzformált**jának nevezzük, amennyiben az integrál konvergens. Ha F f Laplace transzformáltja, akkor f-et F **inverz Laplace transzformált**jának nevezzük. Jelölésben: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

A gyakorlatban Laplace transzformációs táblázatokat használunk a transzformáltak meghatározásához.

Laplace transzformáció, Példa, Feladatok

Legyen $f(t) = 1$. Ekkor

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Számítsuk ki a következő függvények Laplace transzformáltját!

1. $f(t) = e^{at}$.
2. $f(t) = t$.
3. $f(t) = \cos(at)$.
4. $f(t) = e^{t^2}$.

Számítsuk ki a következő függvények inverz Laplace transzformáltját felhasználva az előző feladat eredményeit, illetve transzformációs táblázatokat!

1. $F(s) = \frac{1}{s-1}$.
2. $F(s) = \frac{6}{s^4}$.
3. $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$.

Laplace transzformáció, Tulajdonságok

Tétel

A Laplace transzformáció és az inverz Laplace transzformáció lineáris leképezés.

Példák

Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace transzformáltját!

1. $f(t) = 3t + e^t$.
2. $f(t) = -2 + cost$.

Számítsuk ki az alábbi függvények inverz Laplace transzformáltját!

1. $F(t) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^2}$.
2. $F(s) = -\frac{12}{s^4}$.

Laplace transzformáció, Tulajdonságok

Eltolás

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-\alpha), \qquad s > a+\alpha.$$

Derivált Laplace transzformáltja

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$
$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Legyen $N(s)$ és $D(s)$ polinom. A parciális törtekre bontás módszerével az $R(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ kifejezést olyan egyszerűbb tagok összegeként szeretnénk felírni, amelyek Laplace transzformáltja könnyen kiszámítható, illetve transzformációs táblázatból kikereshető. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $D(s)$ és $N(s)$ főegyütthatója 1.

A módszer lépései

1. lépés Keressünk olyan $r(s)$ és $q(s)$ polinomokat, amelyekre

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = q(s) + \frac{r(s)}{D(s)},$$

ahol $r(s)$ foka szigorúan kisebb, mint $D(s)$ foka.

A módszer lépései

2. lépés Írjuk fel $D(s)$-t $(s-b)^n$ és/vagy $(s^2+\alpha s+\beta)$ alakú tényezők szorzataként, ahol α, β és b valós számok, továbbá, $(s^2+\alpha s+\beta)$-nak nincs valós gyöke.

3. lépés Bontsuk fel $\frac{r(s)}{D(s)}$-t parciális törtek összegére a következő módon:

   (i) Az $(s-b)^n$ alakú tagokat írjuk át az alábbi módon:

$$\frac{A_1}{(s-b)}+\frac{A_2}{(s-b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-b)^n}.$$

   (ii) Az $(s^2+\alpha s+\beta)$ alakú tagokat pedig az alábbi módon:

$$\frac{B_1 s+C_1}{s^2+\alpha s+\beta}+\frac{B_2 s+C_2}{(s^2+\alpha s+\beta)^2}+\cdots+\frac{B_n s+C_n}{(s^2+\alpha s+\beta)^n}.$$

Példák

Bontsuk parciális törtek összegére az alábbi kifejezéseket:

1. $R(s) = \frac{s^3+s^2+2}{s^2-1}$;
2. $R(s) = \frac{s^2+5s-3}{(s^2+16)(s-2)}$.

Példák

Számítsuk ki az inverz Laplace transzformáltakat!

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-3)}\right]$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+6}{s^2+3s}\right]$.

Példa

Laplace transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Megoldás: A Laplace transzformáció linearitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-t}].$$

A deriváltra vonatkozó szabály és a kezdeti értékek felhasználásával kapjuk, hogy

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{where} \quad \mathcal{L}[y] = Y(s).$$

Átrendezés után a következőket kapjuk:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}\right].$$

Bontsuk parciális törtek összegére a jobboldali kifejezést.

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Az inverz Laplace transzformáció linearitását felhasználva kapjuk a kezdeti érték probléma megoldását.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}.$$